

Problem Set 21: 偏序与代数格

提交截止时间：5 月 13 日 10:00

Problem 1

令 $(D_{12}, |)$ 表示 12 的所有正因子组成的偏序集.

- (1) 证明 $(D_{12}, |)$ 构成偏序格 $\langle D_{12}, | \rangle$, 并由此定义运算 $*$ 和 \circ , 证明 $\langle D_{12}, *, \circ \rangle$ 是对应的代数格;
- (2) 按照 (1) 的定义, 说明 $\langle D_{12}, *, \circ \rangle$ 是否是一个有补格;
- (3) 按照 (1) 的定义, 说明 $\langle D_{12}, *, \circ \rangle$ 是否是一个分配格.

Problem 2

下列各集合对于整除关系都构成偏序集, 判断哪些偏序集是格.

- (1) $L = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
- (2) $L = \{1, 2, 3, 6, 12\}$;
- (3) $L = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$;
- (4) $L = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^n, \dots\}$.

Problem 3

设 L 是格, 并且 $a, b, c \in L$ 求以下公式的对偶式:

- (1) $a \wedge (a \vee b) \preceq a$;
- (2) $a \vee (b \wedge c) \preceq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;
- (3) $b \vee (c \wedge a) \preceq (b \vee c) \wedge a$.

Problem 4

设 $\langle L, \preceq \rangle$ 是格, $a, b, c, d \in L$, 且 $a \preceq b, c \preceq d$, 证明 $a \wedge c \preceq b \wedge d, a \vee c \preceq b \vee d$.

Problem 5

证明: 具有 3 个或更多元素的链不是有补格.

Problem 6

设 $\langle L, \preceq \rangle$ 是格, 任取 $a \in L$, 令 $S = \{x | x \in L \wedge x \preceq a\}$, 证明 $\langle S, \preceq \rangle$ 是 L 的子格.

Problem 7

定义: 一个群子群格是由其所有子群和子群间的包含关系所构成的偏序集 (S, \subseteq) .

令 L 为长度为 n 的链, $G = \langle a \rangle$ 为 p^t 阶循环群, 其中 p 为素数, $n = t + 1$, 求证: L 与 G 的子群格同构.

Problem 8

令 $\langle A, \preceq \rangle$ 表示一个有限全序集. 证明:

- (1) A 是一个格并且是有界格;
- (2) 若 A 的元素超过两个, 那么它不可能是有补格;
- (3) A 是分配格.

Problem 9

设 f 是格 (L, \preceq_1) 到格 (S, \preceq_2) 的满同态映射. 证明: 若 (L, \preceq_1) 是有界格, 则格 (S, \preceq_2) 也是有界格.

Problem 10

设 L 为分配格, $a, b, c \in L$, 证明:

$$a \wedge b \leq c \leq a \vee b \quad \Leftrightarrow \quad c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \vee (a \wedge b).$$

Problem 11

给出一个无限格的例子, 使得:

- (1) 既没有最小元也没有最大元;
- (2) 有一个最小元但没有最大元;
- (3) 有一个最大元但没有最小元;
- (4) 有一个最小元也有一个最大元.